Μάθημα 15ο | 26/04/18

$\boxed{\text{Άσκηση 7 ΦΠ}}$

Εφόσον $A \subseteq \bar{A}$, $B \subseteq \bar{B}$

$$\{\rho(x,y) \; x\in A, y\in B\} \subseteq \{\rho(x,y), x\in \bar{A}, y\in \bar{B}\}$$

άρα $\inf\{\rho(x,y) \; x\in \bar{A}, y\in \bar{B}\} \leq \inf\{\rho(x,y) \; x\in A, y\in B\}$

$$\rho(\bar{A},\bar{B}) \leq \rho(A,B)$$

Για νδο: $\rho(A,B) \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$ αρκεί νδο $\forall\ \varepsilon>0$

ισχύει $\rho(A,B) - \varepsilon \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$

Έστω $\varepsilon>0$

Έστω $x\in \bar{A}$, $y\in \bar{B}$. Τότε υπάρχει $x_1 \in A$:

$\rho(x,x_1) < \varepsilon/2$ και $y_1 \in B$: $\rho(y,y_1) < \varepsilon/2$

Τότε $\rho(x_1,y_1) \leq \rho(x_1,x) + \rho(x,y) + \rho(y,y_1) <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Τότε: $\rho(A,B) \leq \rho(x_1,y_1) \leq \rho(x_1,x) + \rho(x,y) + \rho(y,y_1)$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x,y) + \varepsilon/2 =$$

$$= \varepsilon + \rho(x,y)$$

δηλαδή: $\rho(A,B) \leq \varepsilon + \rho(x,y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \rho(A,B) - \varepsilon \leq \rho(x,y)$$

Εφόσον από ισχύει $\forall\, x\in\bar{A}, y\in\bar{B}$

Παίρνουμε: $\rho(A,B)-\varepsilon\leq\rho(\bar{A},\bar{B})$

Θεώρημα Baire

Έστω (X,ρ) μ.χ και $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανοιχτά και πυκνά σύνολα του X. Τότε, το
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$
είναι πυκνό.

Απόδ. (Σκιαγράφηση) Εκτός ύλης

Για νδο ένα σύνολο είναι πυκνό πρέπει νδο τέμνει κάθε ανοιχτό μη-κενό σύνολο. Έστω $U\neq\emptyset$ ανοιχτό

Εφόσον το G_1 είναι πυκνό συμπεραίνουμε ότι τέμνονται $\Rightarrow G_1\cap U\neq\emptyset$. Έστω $x_1\in G_1\cap U$

Τότε $\exists\ \varepsilon_1>0 : \hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1)\subseteq G_1\cap U$

Εφόσον G_2 πυκνό και $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)$ ανοιχτό μη-κενό

$$G_2\cap B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\neq\emptyset$$

Έστω $x_2\in G_2\cap B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\neq\emptyset$ και επιλέγουμε $\varepsilon_2>0$ $\varepsilon_2<\varepsilon_1/2$ τ.ω.

$$\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2$$

Έτσι: $\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_2)$

$$\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq G_1\cap G_2\cap U$$

Συνεχίζονται έτσι βρίσκουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω.

α) $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/2$

β) $\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1) \supseteq \hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2) \supseteq \hat{B}_\rho(x_3,\varepsilon_3) \supseteq \dots$

γ) $\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n) \subseteq G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \cap \bar{U}$

Απο (α) $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

Η $(\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη-κενών κλειστών συνόλων με

$$diam(\hat{B}_\rho(x_n,\varepsilon_n)) \leq 2\varepsilon_n \longrightarrow 0$$

Άρα, απο χαρακτηρισμό Cantor για τους πλήρεις μ.χ

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}_\rho(x,\varepsilon_n) = \{x\}$$

Γι αυτό το x έχουμε $x\in G_n$ $\forall n$ και $x\in\bar{U}$ (απο τη γ)

Επομένως: $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cap \bar{U} \neq \emptyset$

SOS

Συμπαγείς Μετρικοί Χώροι

Ορισμός

Αν X είναι ένα σύνολο, $A \subseteq X$ και $(G_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Θα λέμε ότι $(G_i)_{i\in I}$ είναι κάλυμμα ή κάλυψη του A αν $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$.

Αν $J \subseteq I$ και ισχύει $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$ θα λέμε ότι το $(G_i)_{i\in J}$ είναι υποκάλυμμα του $(G_i)_{i\in I}$ (για το A)

Αν ο (X,ρ) είναι μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ λέμε ότι το $(G_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του A.

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μ.χ. και $K \subseteq X$. Το K λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο κάλυμμα. δηλ. αν για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $(G_i)_{i\in I}$ με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχει $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $K \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$ ή με άλλα λόγια $\exists\, n \in \mathbb{N}\ i_1,\dots,i_n \in I : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{i_n}$

Αν το παραπάνω συμβαίνει για $K = X$ θα λέμε ότι ο μ.χ. (X,ρ) είναι συμπαγής.

Παρατήρηση

Αν (X,ρ) μ.χ και $K \subseteq X$, τότε το K είναι συμπαγές (υποσύνολο του X) αν-ν ο μ.χ (K, ρ_K) όπου ρ_K η σχετική μετρική είναι συμπαγής. (η απόδειξη για άσκηση)

Παραδείγματα

1) Κάθε πεπερασμένο σύνολο ενός μ.χ. είναι συμπαγές.

ΛΥΣΗ

Έστω $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του μ.χ. (X,ρ) και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$

Για κάθε $k\in\{1,\dots,n\}$ $\exists$ $i_k\in I$ ώστε $x_k \in G_{i_k}$

τότε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$

2) Αν (X,ρ) μ.χ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X, $x\in X$ με $x_n \longrightarrow x$. Τότε το σύνολο $K=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ είναι συμπαγές

ΛΥΣΗ

Έστω $(G_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$. Εφόσον το G_{i_0} είναι ανοικτό και $x_n \to x$, $x \in G_{i_0}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in G_{i_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.
Για $k=1, \dots, n_0-1$ επιλέγαμε $i_k \in I$ $x_k \in G_{i_k}$.
Τότε, $K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n_0-1} G_{i_k}$. Επομένως, το K είναι συμπαγές.

3) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $\rho(x,y)=|x-y|$ δεν είναι συμπαγής.

Π.χ. το $((-n,n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{R}$ και δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

4) Το $(0,1)$ ΔΕΝ είναι συμπαγές διότι $\left(\left(\frac{1}{n},1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $(0,1)$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα του $(0,1)$.

5) Όμως το $(0,1]$ δεν είναι συμπαγές
(Π.χ. το $\left(\left(\frac{1}{n},2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $(0,1]$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα)

6) Όμοια, το $[0,1)$ δεν είναι συμπαγές
(Π.χ. το $((-1,-1-1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ για τον ίδιο λόγο)

7) Θα δ.ο. το $[0,1]$ είναι συμπαγές.

8) Το $[0,+\infty)$ δεν είναι συμπαγές
π.χ. $((-\infty,n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $[0,+\infty)$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Γενικότερα, • $[\alpha,\beta]$ είναι συμπαγή για $\alpha\leq\beta$

• (α,β), $[\alpha,\beta)$, $[\alpha,+\infty)$, $(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$ δεν είναι συμπαγή.

9) Αν (X,ρ) μ.χ. όπου ρ η διακριτή μετρική στον X και $K\subseteq X$. Τότε K συμπαγές $\Longleftrightarrow$ K πεπερασμένο
α) Αν K πεπερασμένο τότε K συμπαγές (ισχύει γενικά)
β) Αν K άπειρο η οικογένεια $(\{x\})$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα
Άρα το K δεν είναι συμπαγές.

Πρόταση Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι συμπαγές.
Απόδειξη

Έστω $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $[\alpha,\beta]\subseteq\bigcup_{i\in I}G_i$
Θέτουμε $A=\{t\in[\alpha,\beta] : \exists J\subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $[\alpha,t]\subseteq\bigcup_{i\in J}G_i\}$

Η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί αν δ.ο $\beta\in A$.

1) $\alpha \in A$ (πράγματι $\exists\, i_0 \in I$ · $\alpha \in G_{i_0}$ άρα $I=\{i_0\}$ έχουμε το συμπέρασμα)

2) Το A περιέχει κι άλλα στοιχεία εκτός του α (πράγματι αν $i_0 \in I$ με $\alpha \in G_{i_0}$. Εφόσον το G_{i_0} είναι ανοιχτό ($\exists\, \varepsilon > 0$) τότε $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \subseteq G_{i_0}$

Για t με $\alpha < t < \alpha+\varepsilon$ έχουμε $t \in A$ εφόσον $[\alpha, t] \subseteq G_{i_0}$

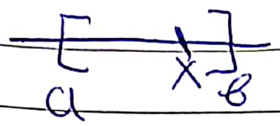
3) Το A είναι προφανώς άνω φραγμένο (όπου β άνω φράγμα του A)
Εφόσον το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο έχει supremum.
Θέτουμε $x = \sup A$
Σύμφωνα με τα (2) ∧ (3) : $\alpha \leq x \leq \beta$

4) $x \in A \wedge x = \beta$
Επιλέγουμε $j_0 \in I$ ώστε $x \in G_{j_0}$ και εφόσον G_{j_0} είναι ανοιχτό $\exists\, \delta > 0$: $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$
Άρα από χαρακτηρισμό sup $\exists\, t \in A$ με $x-\delta < t$
Εφόσον $(t \in A)(\exists\, J \subseteq I)$, J πεπερασμένο ώστε $[a, t] \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

Εφόσον $[t, x] \subseteq (x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$

Άρα $[a, x] \subseteq \bigcup_{i \in J \cup \{j_0\}} G_i$ Άρα $\sup A = x \in A$ (διότι $J \cup \{j_0\}$ πεπερασμένο)

Δείχνουμε ότι $x = \beta$. Υποθέτω (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x < \beta$. Εφόσον $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_{j_0}$



Επιλέξαμε s με $x<s<\min\{x+\delta, b\}$

έχαμε ότι $[x,s] \subseteq G_{j_0}$ και άρα έχαμε ότι

$[x,s] \subseteq G_{j_0}$ και άρα $[a,s] \subseteq \bigcup_{i\in J\cup\{j_0\}} G_i$

Συνεπώς, $s \in A$ άτοπο (διότι $s > \sup A$)

Επομένως $x=b$, άρα $b\in A$.

Γενικές Ιδιότητες Συμπαγών Συνόλων (και συμπαγών μ.χ.)

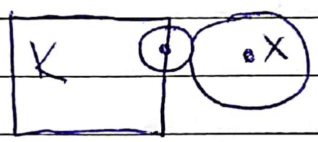
Πρόταση

Έστω (X,ρ) μ.χ. και το K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη

Για να δείξουμε ότι το K είναι κλειστό αρκεί νδο $X\setminus K$ ανοικτό.

Έστω $x\in X\setminus K$ (και αναζητούμε $\varepsilon>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon)\subseteq X\setminus K$)



Για κάθε $y\in K$, $y\neq x$ άρα $\rho(y,x)>0$ και θέλοντας

$\varepsilon_y = \rho(y,x)/2$ έχουμε $B_\rho(y,\varepsilon_y)\cap B_\rho(x,\varepsilon_y) = \emptyset$

Η οικογένεια $(B_\rho(y,\varepsilon_y))_{y\in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K. Εφόσον το K είναι συμπαγές

$\exists\, n\in\mathbb{N}$, $y_1,\dots,y_n\in K$ $\quad K\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(y_k,\varepsilon_{y_k})$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_1}, \ldots, \varepsilon_{y_n}\} > 0$ Τότε $B_\rho(x,\varepsilon) \cap K \subseteq$

$$\subseteq B_\rho(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left(B_\rho(x,\varepsilon) \cap B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})\right) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \left(B_\rho(x, \varepsilon_{y_k}) \cap B_\rho(y_k, \varepsilon_{y_k})\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \emptyset = \emptyset$$

δηλαδή $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus K$ Άρα $X \setminus K$ ανοιχτό δηλ. K κλειστό

Δείχνουμε τώρα ότι το K είναι φραγμένο.
Έστω τυχόν $x \in X$. $K \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_\rho(x,n)$. Εφόσον το K είναι συμπαγές.

$\exists\, n_1, \ldots, n_d \quad K \subseteq \bigcup_{j=1}^{d} B_\rho(x, n_j)$

Θέτουμε $m = \max\{n_1, \ldots, n_d\}$ έχουμε $K \subseteq B_\rho(x,m)$
Άρα $\operatorname{diam}(K) \leq 2m < +\infty$ συνεπώς K φραγμένο

Σημείωση
Το αντίστροφο στην παραπάνω πρόταση δεν ισχύει.
π.χ. αν X άπειρο και ρ η διακριτή μετρική στο X. Το X είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του (X,ρ) αλλά δεν είναι συμπαγές.

Πρόταση Έστω (X,ρ) συμπαγής μ.χ. κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγές

Απόδειξη
Έστω F κλειστό υποσύνολο του X και $(G_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του X με $F \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Τότε $X = F \cup (X \setminus F) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) \cup (X \setminus F)$

Εφόσον ο X είναι συμπαγής $\exists\, n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} \cup (X \setminus F)$ και άρα $F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$

Επομένως, το F είναι συμπαγές

Πρόταση Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.

Απόδ:

Αν το F είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $F \subseteq [a,b]$ όπου $a = \min F$, $b = \max F$.
Εφόσον, το $[a,b]$ είναι συμπαγές και τό F είναι κλειστό (στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[a,b]$)
Άρα συμπεραίνουμε ότι το F είναι συμπαγές

Πρόταση Κάθε συμπαγ. μ.χ. είναι διαχωρίσιμος

Απόδειξη

Έστω (X,ρ) μ.χ. συμπαγής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια $(B_\rho(x, 1/n))_{x\in X}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο

D_n ώστε $X = \bigcup_{x\in D_n} B_\rho(x, 1/n)$

Θέτουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$

Το D είναι αριθμήσιμο (ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων)

Το D είναι πυκνό.

(Αν $y \in X$, ε>0 και αφού $X = \bigcup_{x\in D_n} B_\rho(x, 1/n)$ $\exists\, x \in D_n$

με $y \in B_\rho(x, 1/n)$. Τότε $x \in D$ και $\rho(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Επομένως ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.

Scanned by CamScanner